

Разностная схема Забуски–Краскала

Здесь мы рассмотрим дискретизацию уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \quad (1)$$

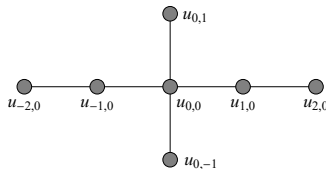
предложенную в работе [1]. Это та самая историческая статья 1965 г., в которой был введен термин *солитон*, как сокращение от *solitary wave pulse* (импульс в виде уединённой волны) или от *solitary wave of translation* (уединённая волна переноса).

Разностная схема имеет вид уравнения для функции $u_{n,m}$ на целочисленной сетке

$$u_{0,1} - u_{0,-1} = a(u_{2,0} - 2u_{1,0} + 2u_{-1,0} - u_{-2,0}) + 2ah^2(u_{1,0} + u_{0,0} + u_{-1,0})(u_{1,0} - u_{-1,0}). \quad (2)$$

Для краткости, n и m в индексах пропущены. Это уравнение аппроксимирует (1) с шагом h по x и ah^3 по t :

$$u_{n,m} \sim u(x, t), \quad x = nh, \quad t = amh^3.$$



Действительно, подставляя разложения

$$u_{n+j,m} \sim u(x + jh, t) = u + jhu_x + \frac{1}{2}j^2h^2u_{xx} + \frac{1}{6}j^3h^3u_{xxx} + \frac{1}{24}j^4h^4u_{xxxx} + O(h^5),$$

$$u_{n,m+j} \sim u(x, t + ajh^3) = u + ajh^3u_t + O(h^6),$$

и сокращая члены с h^0 , h^1 , h^2 и h^4 , получим равенство

$$2ah^3(u_t - u_{xxx} - 6uu_x) + O(h^5) = 0.$$

Итак, уравнение (2) определяет аппроксимацию для (1) с локальной погрешностью второго порядка по h . Следует отметить, что эта схема — не единственная с таким порядком по h . Если заменить правую часть на общий квадратичный многочлен от $u_{-2,0}, \dots, u_{2,0}$ и подбирать коэффициенты так, чтобы сократить максимальную степень h , то в ответе окажется несколько произвольных параметров в дополнение к a . Часть из них можно зафиксировать, потребовав инвариантности уравнения относительно замены $(n, m) \mapsto (-n, -m)$, точно так же, как (1) инвариантно относительно замены $(x, t) \mapsto (-x, -t)$. Конечно, это полезное свойство симметрии следует сохранить в разностной схеме. Но, и с его учётом ответ не единственный.

Упражнение 1. Проверьте, что уравнение с дополнительным параметром b

$$u_{0,1} - u_{0,-1} = a(u_{2,0} - 2u_{1,0} + 2u_{-1,0} - u_{-2,0}) + 2h^2(bu_{1,0} + (3a - 2b)u_{0,0} + bu_{-1,0})(u_{1,0} - u_{-1,0}) \quad (3)$$

также инвариантно относительно смены знаков n, m и даёт h^2 -аппроксимацию.

Можно спросить, почему Забуски и Краскал выбрали $b = a$, а, например, не $b = 3a/2$, что тоже красиво? Об этом они умолчали, но ответ достаточно прост.

Упражнение 2. Проверьте, что при $b = a$ (и только при этом значении) выполняется следующее свойство: схема имеет два разностных закона сохранения с плотностями

$$\rho_{n,m}^{(1)} = u_{n,m+1} + u_{n,m}, \quad \rho_{n,m}^{(2)} = u_{n,m+1}u_{n,m},$$

то есть, разность по m от этих выражений равна разности по n от некоторых других выражений (найдите их):

$$\rho_{n,m+1}^{(i)} - \rho_{n,m}^{(i)} = \sigma_{n+1,m}^{(i)} - \sigma_{n,m}^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

Эти соотношения служат аналогами для двух законов сохранения КдФ

$$\partial_t(u) = \partial_x(u_{xx} + 3u^2), \quad \partial_t(u^2) = \partial_x\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + 2u^3\right).$$

В результате, для быстроубывающих решений будут сохраняться, при эволюции согласно (1) или (2), следующие интегралы или суммы, соответственно:

$$\int_{\mathbb{R}} u \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} u^2 \, dx \quad \text{или} \quad \sum_n u_{m,n}, \quad \sum_n u_{n,m+1} u_{n,m}.$$

В отличие от уравнения КдФ, обладающего бесконечной последовательностью законов сохранения с плотностями, зависящими от производных старших порядков, у дискретизации Забуски–Краскала других законов сохранения нет. Это дискретное уравнение *не является* интегрируемым. Тем не менее, его вполне можно использовать для не очень сложных численных расчётов.

Перейдём к экспериментам.

Возьмём в качестве начального условия простую сумму нескольких солитонов КдФ $u = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx + 4k^3t + \delta)$, отвечающих разным k и δ (понятно, что это уже не будет точным решением, но мы знаем, что отличие от решения мало, если солитоны далеко друг от друга).

Рис. 1. Начальное условие: сумма трех солитонов с $k = 0.7, 0.85$ и 1 ; параметры сетки: $h = 0.1, a = 0.1$.

Сетку удобно брать периодическую: $u_{n+N,m} = u_{n,m}$, где N — число точек на рассматриваемом интервале по x . Это очень распространённый трюк, позволяющий избежать учёта граничных эффектов. Правда, взамен мы получаем не солитонное решение, а аппроксимирующее его конечнозонное, но это даже интереснее.

Параметр h должен быть достаточно мал, чтобы обеспечить хорошее приближение начального профиля по x . Параметр a отвечает за устойчивость разностной схемы и также не может быть большим, иначе решение пойдёт вразнос. Это зависит от крутизны начальных условий, так что параметр приходится подбирать опытным путём.

Попытаемся воспроизвести решение из статьи [1]. В нём происходит распад начального условия в виде синусоидальной волны на 8 отдельных пиков. Поскольку решение периодическое, они не могут разойтись и вынуждены вечно проходить друг через друга. Тем не менее, индивидуальность пиков неплохо прослеживается, чтобы говорить о солитонах. Во всяком случае, Забуски и Краскалу этого было достаточно.

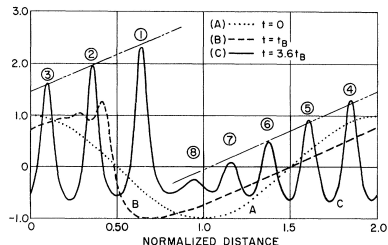


FIG. 1. The temporal development of the wave form $u(x)$.

Рис. 2. Начальное условие $u = \cos 0.15x$; $N = 400$, $a = 0.005$. Справа — график из [1] (по сравнению с ним ось x перевёрнута и масштабирована). Он примерно отвечает моменту $t = 3.6$ на анимации слева.

[1] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* **15:6** (1965) [240–243](#).